Übungen zur Vorlesung
"Markovketten"

Sommersemester 2016, Blatt 5

`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: 20.06.2016 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 16 (Übung)

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0,1\}^m$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|x| = \sum_{k=1}^m |x_k|$.

a) Ist X irreduzibel? Ist X aperiodisch?

b) Berechnen Sie die invariante Verteilung von X.

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Wir betrachten eine einfache Irrfahrt auf einer Uhr mit den Zahlen $1,\dots,12$. Sei also $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette die ausgehend von einem Punkt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu einer der benachbarten Zahlen auf der Uhr springt.

(a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Schritten die X benötigt um in den Ausgangspunkt zurückzukehren.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X alle anderen Zustände besucht bevor es zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.

Aufgabe 18 (Irrfahrt auf einem Schachbrett) (10 Punkte)

Wir können ein Schachbrett als einen Graph auffassen, wobei wir die Menge der Knoten,

$$K = \{(u,v) : 1 \le u, v \le 8\},$$

in eine Matrix anordnen:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,8) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & (2,8) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots & (3,8) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (8,1) & (8,2) & (8,3) & \cdots & (8,8) \end{matrix}$$

Die Menge der Kanten sei gegeben durch

$$V = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in K \times K : |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| = 1\}.$$

Die Punkte die durch eine Kante verbunden sind, sind benachbart. Die Nachbarn eines Knotens auf dem Graphen sind also gerade die Punkte die man durch Addieren oder Subtrahieren von 1 zu einer der Koordinaten erhält. *(Bitte wenden!)*

a) Eine einfache Irrfahrt auf dem Graphen ist eine Markov Kette, bei der das Teilchen sich einen neuen Zustand uniform unter den Nachbarn auswürfelt. Bestimmen Sie eine invariante Verteilung für die einfache Irrfahrt auf dem oben beschriebenen Graphen.

b) Nun modifizieren wir die Spielregeln. Das Teilchen wählt uniform eine der vier möglichen Richtungen. Es bewegt sich um einen Schritt in diese Richtung falls möglich. Ansonsten bleibt es stehen. Wie ändert sich die invariante Verteilung im Vergleich zu (a)?

c) Ein Springer kann von (v, u) aus zu einem der folgenden acht Felder ziehen (vorausgesetzt sie befinden sich auf dem Schachbrett):

$$(u + 2, v + 1), (u + 2, v - 1), (u + 1, v + 2), (u + 1, v - 2),$$
$$(u - 1, v + 2), (u - 1, v - 2), (u - 2, v + 1), (u - 2, v - 1).$$

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Felder, die ensteht, wenn man bei jedem Schritt einen von den legalen Springerzügen zufällig wählt. Bestimmen Sie die invariante Verteilung und die erwartete Anzahl von Zügen, die ein Springer braucht, um in $(1, 1)$ startend nach $(1, 1)$ zurückzukehren.