Übungen zur Vorlesung
"Markovketten"

Sommersemester 2016, Blatt 5

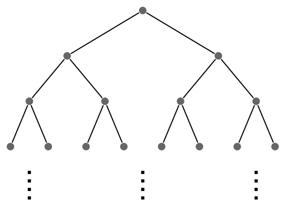
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: 06.06.2016 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 5 (Irrfahrt auf einem binären Baum) (Übung)

Es sei $G = (V, E)$[1] der unten abgebildete binäre Baum mit Wurzel. Insbesondere hat jeder Knoten genau zwei "Nachkommen" und jeder Knoten außer der Wurzel genau einen "Vorfahren".



Ferner sei $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine einfache Irrfahrt auf G, d.h. zu jedem Zeitpunkt wird gleichmäßig unter den Nachbarn einer ausgewählt zu dem die Irrfahrt dann spring. Ist diese Irrfahrt transient oder rekurrent? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 6 (Ehrenfest Modell) (5 Punkte)

Für ein $N \in \mathbb{N}$ sei $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, \ldots, N\}$, und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j \in S}$, wobei

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i, i-1) = \frac{i}{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass π mit $\pi(j) = 2^{-N}\binom{N}{j}$ eine invariante Verteilung der Markovkette ist.

b) Zeigen Sie, dass keine der Zeilen der n-Schritte Übergangsmatrix P^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Was ist der Grund dafür?

c) Betrachten Sie nun die Markovkette mit Übergangsmatrix $Q := qI_{N+1} + (1-q)P$. Dabei ist P wie oben, $q \in (0,1)$ und I_{N+1} ist die $(N+1) \times (N+1)$ Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass π aus (a) die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist, und dass jede Zeile von Q^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert.

(*Bitte wenden!*)

[1] G = Graph, V = Menge der Knoten/Ecken (engl. vertex/vertices), E = Menge der Kanten (engl. edges). Knoten die durch Kanten aus E direkt miteinander verbunden sind, werden als (nächste) Nachbarn bezeichnet

Aufgabe 7 (Lebensdauer von Geräten) (5 Punkte)

Betrachten Sie eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$, die das aktuelle Lebensalter eines Gerätes, zum Beispiel einer Glühbirne, in Tagen modelliert. Ist das Gerät aktuell $k \in \mathbb{N}_0$ Tage alt, bleibt es mit Wahrscheinlichkeit p_k weiter im Gebrauch (das Alter ist dann $k+1$), oder es wird mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_k$ durch ein neues Gerät ersetzt, dessen Alter erneut bei 0 startet. Finden Sie Bedingungen die garantieren, dass

(a) 0 rekurrent ist;

(b) 0 positiv rekurrent ist.

(c) Finden Sie im positiv rekurrenten Fall die invariante Verteilung der Markovkette.

Aufgabe 8 (Übung)

Eine *doppelt-stochastische* Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ mit $N := |I| < \infty$ wird definert durch:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j \in I, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i \in I.$$

Geben Sie eine Verteilung auf I an, die für alle doppelt-stochastischen Matrizen invariant ist.