Übungen zur Vorlesung
“Markovketten”

Sommersemester 2016, Blatt 2

`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: 09.05.2016 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Stellen Sie die Markovkette graphisch dar. Bestimmen Sie die Perioden der einzelnen Zustände und geben Sie die wesentlichen und die unwesentlichen Klassen der Markovkette an.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Es sei $X_1, X_2, X_3 \dots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \text{ und } \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Seien ferner $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $M_n = \max\{S_k | 0 \leq k \leq n\}$.

a) Zeigen Sie, dass $Y_n = M_n - S_n$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

b) Zeigen Sie, dass $M_n = Y_n + S_n$ keine Markovkette ist. (Also: die Summe zweier Markovketten muss keine Markovkette sein.)

Aufgabe 7 (Übung)

Es sei $(I, \mathcal{I})$ ein messbarer Raum, wobei I eine abzählbare Menge ist. Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von I-wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wird *Markovkette r-ter Ordnung* genannt, falls für alle $B \in \mathcal{I}$ und alle ganzzahligen $n \geq r - 1$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, m \leq n)) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, n - r + 1 \leq m \leq n)).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $Y_n := (X_n, \dots, X_{n+r-1})$ eine I^r-wertige Markovkette im „gewöhnlichen Sinne“ (wie in Definition 2.3 bzw. Satz 2.6) ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Es sei eine Markovkette X mit Zustandsraum $S = \{1, 2\}$ gegeben. Ihre Übergangsmatrix sei

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, indem Sie die Markoveigenschaft von $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden, dass

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} = (\alpha+\beta-1)\Big(\mathbb{P}(X_n = 1) - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\Big).$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} + (\alpha+\beta-1)^n\Big(\mathbb{P}(X_0 = 1) - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\Big)$$

gelten muss.
Bemerkung: Dies zeigt, dass für $0 < 2-\alpha-\beta < 2$ die Verteilung $\big(\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2)\big)$ exponentiell gegen $\big(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\big)$ konvergiert. Machen Sie sich klar, was passiert wenn man $\big(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\big)$ als Startverteilung der MK wählt.